Određivanje konfiguracija kružnica koristeći prostor Minkovskog

Marija Stanojević
Gimnazija Svetozar Marković, Niš
mstanojevic118@gmail.com

Rezime

U ovom radu se razmatraju osobine sistema četiri kružnice u zavisnosti od njihovog odnosa. Dokazana je Dekartova teorema koja daje uslov da u sistemu četiri kruga svaka dva budu međusobno tangetna. Definisano je preslikavanje iz površi u četvorodimenzionalni prostor Minkovskog i data je formula koja se odnosi na rešavanje karakterističnih sistema četiri kružnice. Ova formula korišćena je da bi se našao četvrti krug u sistemu u kome su poznata tri kruga i odnos četvrtog kruga sa svakim od tri data kruga.

Ključne reči: Dekartova teorema, Apolonijevi problemi, prostor Minkovskog, sistem krugova

1 Uvod

Svaku kružnicu možemo definisati kao polinom drugog reda oblika

$$C(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2px - 2qy + c \quad (1)$$

Lema 1. *Ako je a vodeći koeficijent jednačine $C(x,y) = a(x^2+y^2) - 2px - 2qy + c = 0$, dokazati da za $a = 0$ ovaj polinom predstavlja jednačinu prave.*

Dokaz Ako u jednačinu kružnice uvrstimo $a = 0$ dobijamo da je $C(x,y) = -2px - 2qy + c = 0$, odakle sledi da je $y = \frac{-px}{q} + \frac{c}{2q}$, ako koeficijent uz x predstavimo kao $k = \frac{-p}{q}$, a slobodni član kao $n = \frac{c}{2q}$, ovu jednačinu možemo napisati kao $y = kx + n$, što je linearna jednačina prave. Možemo primetiti da je jednačnina prave zapravo specijalan slučaj jednačine kružnice. Pretpostavimo da postoji $a \neq 0$ za koje važi da je $C(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2px - 2qy + c$ takođe jednačina prave, odatle sledi da je kvadratna jednačina jednačina prave, što nije moguće.
Kako ćemo razmatrati samo osobine kružnica pretpostavićemo da je $a \neq 0$ Odredimo koordinate kružnice koja je predstavljena polinomom oblika $C(x,y) = a(x^2+y^2) - 2px - 2qy + c$. Ovaj polinom možemo transformisati

tako da dobijemo karakterističnu jednačinu kružnice $(x-\frac{p}{a})^2+(y-\frac{q}{a})^2 = \frac{-c}{a}$. Odavde vidimo da se centar nalazi u tački $(\frac{p}{a}, \frac{q}{a})$, a poluprečnik je $r = \sqrt{(x-\frac{p}{a})^2+(y-\frac{q}{a})^2}$. Ukoliko su svi parametri a, p, q nule onda kružnica sa ovom polinomnom formulom ne postoji, o čemu će kasnije biti reči.

Definicija 1. *Ako je u jednačini kružnice oblika* $C(x,y) = a(x^2+y^2)-2px-2qy+c = 0$ *koeficijent* $a = 1$, *onda kažemo da je ta kružnica normalizovana.*

Klasu kružnica oblika $\Theta(x,y) = 0\cdot(x^2+y^2) - 2\cdot 0\cdot x - 2\cdot 0\cdot y + c = 0$ nazivamo klasom nepostojećih kružnica jer se matematički mogu izvesti, a takva kružnica ne postoji u realnom svetu.

Definicija 2. *Ugao između kružnica* C_1 *i* C_2 *koje se seku jednak je uglu između tangenta na krugove iz tačke preseka krugova.*

2 Osobine kružnica

Definicija 3. *Neka su*

$$C_1(x_1,y_1) = a_1(x_1^2+y_1^2) - 2p_1x_1 - 2x_1y_1 + c_1 = 0 \quad (2)$$

$$C_2(x_2,y_2) = a_2(x_2^2+y_2^2) - 2p_2x_2 - 2x_2y_2 + c_2 = 0 \quad (3)$$

jednačine kružnica, onda se zbir kružnica C_1+C_2 *može predstaviti jednačinom* $(C_1+C_2)(x,y) = (a_1+a_2)(x^2+y^2) - 2(p_1+p_2)x - 2(q_1+q_2)y + (c_1+c_2) = 0$
Proizvod kružnice C_1 *i skalara* k *koji pripada* R *definišemo jednačinom oblika* $(kC_1) = (x_1,y_1) = ka_1(x_1^2+y_1^2) - 2kp_1x_1 - 2kq_1y_1 + kc_1 = 0 \quad (4)$

Definicija 4. *Ako su (2) i (3) jednačine kružnica* C_1 *i* C_2, *onda je proizvod tih kružnica* $C_1 * C_2 = p_1p_2 + q_1q_2 - \frac{c_1a_2+c_2a_1}{2} \quad (5)$.

Lema 2. *Ako su* C_1, C_2 *i* C_3 *kružnice i* k *realan broj, onda važi*
1) $C_1 * (kC_2) = (kC_1) * C_2 = k(C_1 * C_2)$
2) $C_1 * (C_2 + C_3) = C_1 * C_2 + C_1 * C_3$

Dokaz Tvrđenja 1) i 2) možemo lako dokazati ako svaku kružnicu predstavimo u obliku jednačine (1) i primenimo formulu za proizvod kružnica. Pregrupisavanjem koeficijenata sa svake strane jednakosti dobijamo da jednakost važi.

Lema 3. *Ako su* $C_1 = 0$ *i* $C_2 = 0$ *dve normalizovane jednačine, onda proizvod kružnica možemo predstaviti kao* $C_1 * C_2 = d^2 - r_1^2 - r_2^2$, *gde je* d *rastojanje između centara kružnica. Ovaj proizvod nazivamo Derbuksov proizvod (Darboux's product).*

Posledica 1. *Za dve normalizovane kružnice koje se međusobno seku važi da je Derbuksov proizvod* $C_1 * C_2 = r_1r_2\cos(\alpha)$.

Dokaz Ako se dve kruznice seku obeležimo tačke preseka sa P i Q, a centre krugova sa O_1 i O_2, onda je $d = O_1O_2$ i primenimo kosinusnu teoremu na trougao O_1O_2P. $d^2 = O_1P^2 + O_2P^2 - 2O_1P * O_2P\cos(\alpha) = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha)$. Zamenimo sada d u Derbuksov proizvod i dobićemo da je $C_1 * C_2 = r_1r_2'\cos(\alpha)$. Potencija tačke je poseban slučaj Derbuksovog proizvoda, gde je druga kružnica predstavljena tačkom sa poluprečnikom nula.

Lema 4. *Dva kruga C_1 i C_2 su međusobno normalna ako i samo ako je njihov proizvod nula.*

Dokaz Ako se ova dva kruga seku, onda za njih važi da je $C_1 * C_2 = r_1r_2\cos(\alpha)$. Kako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, to je $\cos(\alpha) = 0$, pa samim tim i taj proizvod.
Ako je proizvod dva kruga 0, onda je $C_1 * C_2 = r_1r_2\cos(\alpha) = 0$ i $r_1 \neq 0$ i $r_2 \neq 0$, odakle sledi da je $\cos(\alpha) = 0$, pa je $\alpha = \frac{\pi}{2}$
Za $c \neq 0$ možemo napisati jednačinu kružnice oblika $\theta(x, y) = 0 * (x^2 + y^2) - 2 * 0 * x - 2 * 0 * y + c = 0$. Sve jednačine kružnica ovog oblika predstavljaju familiju nepostojećih kružnica.

3 Dekartova teorema (Decartes theorem)

Teorema 1. *Neka su C_1, C_2, C_2 i C_4 četiri kružnice u ravni takve da svaka dodiruje spolja ostale tri. Neka je R_i poluprečnik kružnice C_i, onda je*

$$2(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_4^2}) = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4})^2 \quad (6)$$

Dokaz Neka je $\alpha_i = \frac{1}{R_1}$, za $i = 1, 2, 3, 4$. Jednačinu svake kružnice možemo transformisati tako da je $a_i = \frac{1}{R_i}$.
Pretpostavimo da postoje realni brojevic x_1, x_2, x_3, x_4 tako da je

$$x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 + x_4C_4 = \theta \quad (7)$$

gde je θ kružnica iz familije nepostojećih kružnica. Množenjem kružnica C_1, C_2, C_3, C_4 sa θ dobijamo sistem jednačina. Sa desne strane svake jednačine se nalazi $\frac{a_iR}{2}$, gde je R poluprečnik nepostojeće kružnice θ. Kako smo jednačine kružnica transformisali tako da je $a_i = \frac{1}{R_i}$, onda zamenom a_i u $\frac{a_iR}{2}$ dobijamo $\frac{R}{2R_i}$, zatim predstavimo $\frac{1}{R_i}$ kao α_i. Kako je R bilo koji broj poluprečnik kružnice iz skupa nepostojećih kružnica, uzećemo da je $R = -4$ dobijamo sistem jednačina

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = \alpha_1$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \alpha_2 \quad (8)$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = \alpha_3$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = \alpha_4$$

Jednakost (7) važi ako je rešenje dobijenog sisema jedinstveno. Ako predstavimo ovaj sistem kao matricu, onda je sabiranjem i oduzimanjem vrsta možemo trasformisati u matricu

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Kako je determinanta ove matrice različita od nule onda prema Kramerovom (Cramer) pravilu postoji jedinstveno rešenje ovog sistema.
Ako množimo jednačinu (7) sa jednačinom kružnice θ, sa desne strane dobićemo nulu kao proizvod dve θ matrice, a jednačina je $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0 \quad (9)$. Ako u jednačini (9) zamenimo α_i odgovarajućom jednačinom iz sistema (8) dobijamo da je

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 2 \sum_{i=1,j=1}^{4} x_i x_j = 0 \quad (10)$$

Sabiranjem jednačina iz sistema (8) dobijamo da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, odatle sledi da je $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 = 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$. Zamenom α_i odgovarajućom jednačinom iz sistema (8) dobijamo formulu

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2 = 4 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \quad (11)$$

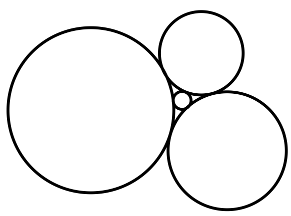
Razlika $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 = 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$ i $\sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_i^2 = 4 \sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2$ daje jednačinu oblika

$$\sum_{i=1,j=1}^{4} \alpha_i \alpha_j = 4 \sum_{i=1,j=1}^{4} x_i x_j (12)$$

Koristeći jednačine (11) i (12) jednačinu (10) možemo da transformišemo u sledeću

$$2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2$$

zamenom α_i sa $\frac{1}{R_i}$ dobijamo Dekartovu jednačinu.



Dekartov sistem četiri kružnica

Jednačinu dobijenu Dekartovom teoremom možemo predstaviti kao proizvod matrica $b^T Db = 0$, gde je D slična matrica matrici sistema (8), b vektor četiri kružnice, a b^T transponovana matrica vektora b.

$$b^T Db = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = 0$$

4 Prostor Minkovskog (Minkowski space)

Definicija 5. *Prostor Minkovskog je četvorodimenzionalni pseudoeuklidski prostor* $R_{1,3}$

U četvorodimenzionalnom prostoru Minkovskog imamo jednu dimenziju vremena koju obeležavamo $x_0 = ct$, gde je c brzina svetlosti, a t vreme. Ostale tri dimenzije predstavljaju prostor i obelezavamo ih sa $x_1 = x$, $x_2 = y$ i $x_3 = z$.

Definicija 6. *Pseudoskalarni proizvod vektora x i y definišemo kao* $\langle x, y\rangle_{1,3} = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$.

Iz definicije pseudoskalarnog proizvoda dva vektora sledi da je pseudoskalarni kvadrat vektora $\|x\|^2_{1,3} = \langle x, x\rangle_{1,3} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Definicija 7. *Prostor Minkovskog možemo podeliti na tri disjunktna podskupa:*
1) $\{x \in R^4_{1,3} : \|x\|\ 1,3 > 0\}$ *je skup vremenskih vektora*
2) $\{x \in R^4_{1,3} : \|x\|\ 1,3 = 0\}$ *je skup izotropnih (svetlosnih) vektora*
3) $\{x \in R^4_{1,3} : \|x\|\ 1,3 < 0\}$ *je skup prostornih vektora*

Izotropni vektori su oni vektori kod kojih važi $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Definicija 8. *Standardna izotropija četvorodimenzionalnog prostora Minkovskog podrazumeva linearni realni prostor $M \cong R^4$ sa skalarnim proizvodom $\langle , \rangle$ datim matricom*

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Iz definicije (14) vidimo da je za vektore $\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 \end{bmatrix}$ i $\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{bmatrix}$ skalarni proizvod jednak $\langle \vartheta, \omega\rangle = \frac{1}{2}\vartheta_1\omega_2 + \frac{1}{2}\vartheta_2\omega_1 - \vartheta_3\omega_3 - \vartheta_4\omega_4$. Kvadrat vektora ϑ je odatle $|\vartheta|^2 = \vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_3^2 - \vartheta_4^2$
Matricu (13) zovemo standardna izotropna baza.

Definicija 9. *Pedo (Pedoe) projektivno preslikavanje je preslikavanje iz skupa Ω krugova u prostoru u zrake u standardnom izotropskom Minkovski prostoru M (projektivni prostor PM) $\pi : \Omega \rightarrow PM$,*

$$\pi(C) = L\{\begin{bmatrix} 1 & x_0^2 + y_0^2 - r^2 & x_0 & y_0 \end{bmatrix}^T\}$$

gde je L lineal za vektorski prostor V.

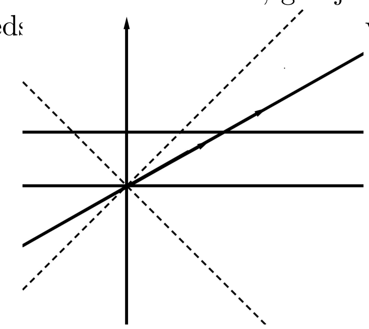
Ukoliko Pedo preslikavanjem slikamo pravu dobicemo

$$\pi(S) = L\{\begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{2} & a & b \end{bmatrix}^T\}$$

Ako Pedo preslikavanje proširimo i na tačke one se slikaju u

$$\pi(P) = L\{\begin{bmatrix} 1 & x_0^2 + y_0^2 - r^2 & x & y \end{bmatrix}^T\}$$

što je u svetlosnom konusu , gde je $|\pi(\vartheta)|^2 = 0$, za svako $\forall \vartheta \in \pi(P)$ Zraci koji preds van svetlosnog konusa.



Prostor Minkovskog *Zraci u prostoru Minkovskog koji predstavljaju kružnice*

Definicija 10. *Pedo specijalno preslikavanje je specifikacija $\pi^* : \Omega \rightarrow M$ koji preslikava jedinični prostor kao vektor u M tako da $\pi^*(C) = \pi(C)$ i $|\pi^*(C)|^2 = -1$*

Da bismo izbegli dvosmislenost ove definicije uzećemo da je prva komponenta π^* uvek nenegativna. Vektor π^* zovemo Pedo vektor.

$$\pi^* = \begin{bmatrix} b \\ \bar{b} \\ x^* \\ y^* \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ \frac{x^2+y^2-r^2}{r} \\ \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

gde su $b = \frac{1}{r}$, $\bar{b} = x^2 + y^2 - r^2 r$, $x^* = \frac{x}{r}$ i $y^* = \frac{y}{r}$.
Pokažimo sada da su matrice C i π^* slične, tj. da π^* predstavlja isti krug kao C.

$$C \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ c \\ p \\ q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ x_0^2 + y_0^2 - r^2 \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ \frac{x^2+y^2-r^2}{r} \\ \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \end{bmatrix} \sim \pi^*(C)$$

Teorema 2. *Specijalno Pedo preslikavanje je injekcija u jedinični hiperboloid u M i odgovara pseudoeuklidskom skalarnom priozvodu koji je u relaciji sa Darbuksovim proizvodom krugova* $\langle \pi(C_1), \pi(C_2)) \rangle = \frac{1}{2}\frac{C_1 * C_2}{r_1 r_2}$

Pokušajmo sada da nađemo ortonormalnu bazu koja je dijagonalna i odgovara izotropskoj bazi u kojoj smo do sada radili.

$$g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim g_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Odavde sledi da je skalarni proizvod sada $\langle \vartheta, \omega \rangle = \vartheta_1\omega_1 - \vartheta_2\omega_2 - \vartheta_3\omega_3 - \vartheta_4\omega_4$. Pedo vektor kruga sada je oblika

$$\pi^*(C) = \begin{bmatrix} \frac{1+x_0^2+y_0^2-r^2}{2r} \\ \frac{1-x_0^2-y_0^2+r^2}{2r} \\ x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b^2+\frac{x_0^2+y_0^2}{r}-1}{2b} \\ \frac{b^2-\frac{x_0^2+y_0^2}{r}+1}{2r} \\ x^* \\ y^* \end{bmatrix}$$

5 Teorema o konfiguraciji krugova

Definicija 11. *Gramova(Gram) matrica je matrica skalarnih proizvoda svih vektora $\vartheta \in V$, gde je V vektorski prostor, tako da je $f_{i,j} = \langle \vartheta_1, \vartheta_2 \rangle$.*

Neka su C_1, C_2, C_3 i C_4 krugovi predstavljeni Pedo jedniničnim vektorima. Definišimo skup krugova $A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix}$ i nad njim uvedimo Gramovu matricu tako da je $f_{i,j} = \langle C_i C_j \rangle$.

Teorema 3. *Ako su krugovi $C_1, \cdots, C_4$ linearno nezavisni vektori, onda je*

$$AFA^T = G \quad (15)$$

gde je G inverz $G = g^{-1}$ i F je inverz $F = f^{-1}$.

Dokaz Matricu f možemo napisati na sledeći način $f = A^T g A$. Kako je A inverzibilna matrica zbog nezavisnosti ova četiri kruga, onda možemo napisati $f^{-1} = A^{-1}g^{-1}(A^T)^{-1}$. Pomnožimo sada obe strane jednakosti sa A i A^T Ako je

$$g = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow G = g^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Osnovni uslov ove teoreme je da su vektori kružnica linearno nezavisni, pa ovaj metod ne možemo primeniti na linearno zavisne vektore. U slučaju

linearno zavisnih vektora determinanta matrice f bi bila jednaka nuli, pa ne bismo mogli da nađemo inverz F, što znači da ne bismo mogli da primenimo ovu metodu.
Da bi smo olakšali neka izračunavanja možemo da primenimo jednakosti

$$x^{*T} F x^* = -1$$

$$y^{*T} F y^* = -1$$

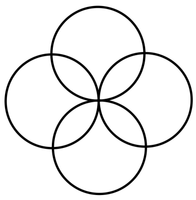
$$b^T F b = 0$$

Zadnja jednačina je zapravo Dekartova formula, koja važi za nezavisne krugove.

6 Neki karakteristični preseci krugova

Lema 5. *Ne postoji konfiguracija četiri međusobno normalna kruga.*

Dokaz Matrica F je u ovom slučaju jedinična matrica, pa jednačinu (15) možemo pisati $AFA^T = AA^T = G$. Ovakva jednačina je nemoguća jer je leva strana jednačine pozitivna, a desna negativna.



Neuspeli pokušaj crtanja četiri kružnica od kojih su svake dve međusobno normalne

Teorema 4. (Proširena Dekartova teorema) Četiri kruga od kojih se svaka dva dodiruju unutra ili spolja zadovoljavaju jednačinu iz Dekartove teoreme $2(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_4^2}) = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4})^2$.

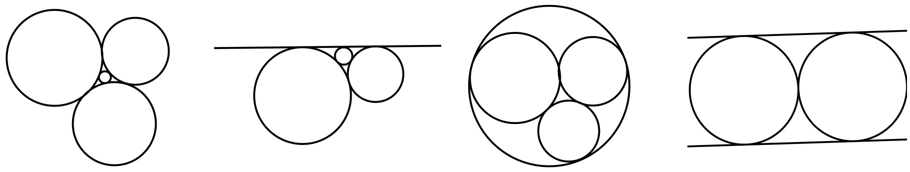
Dokaz Za svaka četiri kruga od kojih se svaka dva dodiruju spolja važi da je matrica f jednaka

$$f = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow F = f^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(Pogledati poglavlje tri, dokaz Dekartove teoreme).
Primenimo sada jednačinu (15) i dobićemo da je

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 & \bar{b}_4 \\ x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4 \\ y_1^* & y_2^* & y_3^* & y_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \bar{b}_1 & x_1^* & y_1^* \\ b_2 & \bar{b}_2 & x_2^* & y_2^* \\ b_3 & \bar{b}_3 & x_3^* & y_3^* \\ b_4 & \bar{b}_4 & x_4^* & y_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

gde su obe strane pomnožene sa četiri, pa je $4f^{-1} = D$, matrici Dekartove teoreme.



Moguća geometrijska rešenja proširene Dekartove teoreme

Da bi uopštili ovu jednakost moramo pretransformisati matricu f, tako da ona predstavlja i mogućnost da se dva kruga dodiruju unutra. Dobijamo da je

$$f = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow F = f^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = RDR$$

gde je $R = diag(1, 1, 1, -1)$. Odatle sledi da je proširena Dekartova formula $b^T(RDR)b = 0$, ili $(Rb)^T(Rb) = 0$. Zbog toga imamo da je znak kružnica koje dodiruju drugi krug s unutrašnje strane imaju negativan predznak.

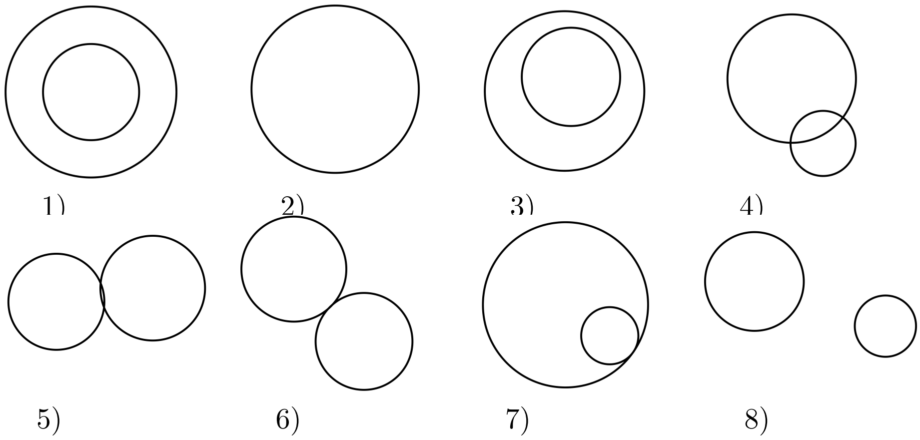
7 Položaj četiri kružnice

Koristeći formulu (15) možemo naći položaj kružnice C_4 ako znamo položaje kružnica C_1, C_2 i C_3 i ako je četvrta kružnica u karakterističom odnosu sa ostalim kružnicama.
Svaki element matrice f izračunavamo na sledeći način

$$\varphi_{i,j} = \frac{d_{i,j}^2 - r_i^2 - r_j^2}{2r_i r_j} = \frac{1}{2}(d_{i,j}b_i b_j - \frac{b_i^2 + b_j^2}{b_i b_j})(16)$$

$d_{i,j}$ je rastojanje između centara krugova i i j, r_i označava poluprečnik i-tog kruga, a $b_i = \frac{1}{r_i}$ je krivina. Iz ove formule vidimo da možemo razlikovati nekoliko različitih slučajeva.
1) U slučaju da su kružnice koncentrične $\varphi_{i,4} = \frac{-r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}$, tj. manji je od -1.
2) Ukoliko se ova dva kruga poklapaju, onda je $\varphi_{i,4} = -1$
3) U slučaju da je $0 > d^2 > r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \Rightarrow 0 > \varphi_{i,4} > -1$, specijalno $\varphi_{i,4}$ će biti vrednost između $\frac{-1}{2}$ i 0 kada je ugao između kružnica C_i i C_4 veći od $\frac{\pi}{2}$ i manji od π
4) Ako su C_i i C_4 međusobno normalni krugovi onda je $\varphi_{i,4} = 0$
5) Ukoliko se kružnice C_i i C_4 seku po jednačini rastojanje $d_{i,4}^2$ između centara će biti $d_{i,4} \leq r_i r_j$ što je manje od $2r_i r_j$, pa će $\varphi_{i,4}$ biti vrednost između nule i jedne polovine
6) Ukoliko se kružnice C_i i C_4 dodiruju $\varphi_{i,4}$ je jedan

7) Ako nemaju zajedničkih tačaka broj je veći od jedan. Određivanjem elemenata matrice f tražimo njen inverz F i primenjujemo jednačinu (15). Imamo da je $bFb^T = 0$, što možemo napisati i kao jednačinu opstog oblika $\sum\limits_{i,j=1}^{4} \varphi_{i,j} b_i b_j$, pa odatle možemo izračunati $b_4 = \frac{1}{r_4}$.



Mogući odnosi dve kružnice

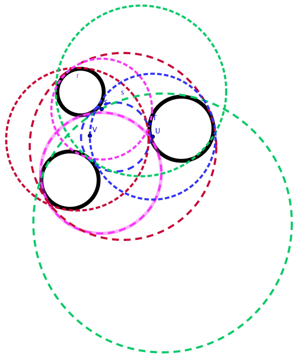
7.1 Apolonijev problem

Apolonijev problem se sastoji u nalaženju kružnice C_4 koji dodiruje tri proizvoljno zadate kružnice C_1, C_2, C_3. Dokažimo da ovakva kružnica postoji i da ovaj problem ima ǒsam različitih rešenja. Matrica koja predstavlja Apolonijev problem je

$$\begin{bmatrix} -1 & * & * & \pm 1 \\ * & -1 & * & \pm 1 \\ * & * & -1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dobijamo simetričnu matricu u kojoj su prva tri elemnta zadnje kolone (prva tri elementa zadnje vrste) ± 1 čime određujemo sve moguće slučajeve, a ukoliko se opredelimo za tačno određene znakove ispred prva tri elemenata zadnje vrste (kolone) dobijamo jedno od osam mogućih rešenja, pa imamo ukupno 2^3 mogućnosti. Da bismo definisali elemente matrice $*$ koristimo jednačinu iz teoreme (2). Iz jednačine (16) dobijamo da je konfiguracija matrice

$$f = \begin{bmatrix} -1 & \varphi_{12} & \varphi 13 & \pm 1 \\ \varphi_{12} & -1 & \varphi_{23} & \pm 1 \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & -1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & -1 \end{bmatrix}$$

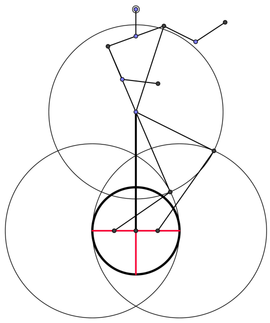


Grafički prikaz svih osam rešenja Apolonijevog problema

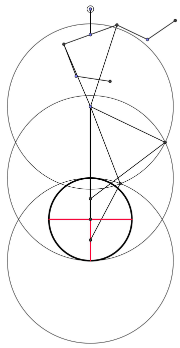
U zavisnosti od odnosa kružnica C_1, C_2 i C_3 dobićemo različite vrednosti za $\varphi_{i,j}$. Za konkretno date krugove C_1, C_2, C_3 možemo izračunati vrednosti $\varphi_{i,j}$ i dodati ih u matricu f. Zatim računamo inverz matrice f i primenjujući jednakost (15) možemo naći G i rešenje Apolonijevog problema koje dobijamo iz F. Zapravo, na osnovu datih uslova i tri kruga C_1, C_2 i C_3 možemo naći mesto četvrte kružnice. Kako je $bFb^T = 0$, gde je $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}^T$ i kako znamo vrednosti b_1, b_2, b_3 možemo naći vrednosti za b_4, čime bismo mogli da odredimo i poluprečnik četvrtog traženog kruga.

8 Model monocikla

Ovaj metod kojim nalazimo potrebne osobine četvrte kružnice ako znamo poluprečnike ostale tri kružnice i odnose svake dve kružnice možemo primeniti na problem voženja monocikla. Nacrtajmo model čoveka koji vozi monocikl. Takav model sadrži četiri kružnice: tri koje su određene dužinom čovekovih nogu i četvrte koja je popupreňik monocikla. Možemo da nađemo najbolji poluprečnik točka ako odredimo odnose ove četiri kružnice. Da bismo dobili poluprečnik točka koji će najviše odgovarati vozaču monocikla, odredimo položaje svaka dva kruga tako što postavimo model u dva različita položaja:
1) Pedale čine horizontalnu ravan;
2) Pedale čine vertikalnu ravan;
Dobijene odnose krugova ubacimo u Gramovu matricu i potražimo inverz ove matrice. Kada elemente matrice predstavimo kao koeficijente ispred proizvoda svaka dva poluprečnika. Dvostruki elemenat $F_{i,j}$ je koeficijent ispred proizvoda R_iR_j jer je matrica simetrična i koeficijent ispred R_iR_j zbir koficijenata ispred R_iR_j i R_jR_i. Na ovaj način dobijamo kvadratnu jednačinu čijim rešavanjem nalazimo poluprečnik četvrte kružnice, u ovom slučaju točka. Ako izmerimo uglove sa modela u slučaju 1) i 2) dobijamo da je traženi poluprečnik u prvom slučaju 2,54, a u drugom 2,8, pa bi najadekvatniji poluprečnik točka bio njihova aritmetička sredina 2,67.



Horizontalni položaj pedala



Vertikalni položaj pedala

9 Zaključak

U ovom radu su ispitivani odnosi kružnica u sistemu sa četiri kružnica u ravni pomoću osobina prostora Minkovskog. Pokazano je da se za svaki sistem četiri kružnica čiji su međusobni odnosi poznati mogu može naći mesto ili poluprečnik četvrte kružnice ako su ostala tri poluprečnika poznata. Moguća primena ovakvih sistema su matematički problemi kao što je dokazivanje teorema i rešavanje matematičkih problema kao što je problem Apolonijevih kružnica. Takođe, ova metoda može poslužiti pri proračunavanju osobina mehaničkih mašina koje za svoj rad koriste zupčanike ili u modelima i nacrtima koji koriste sisteme kružnica. U ovom radu određivan je najadekvatniji poluprečnik monocikla u odnosu na dužinu nogu čoveka koji vozi.

Literatura

[1] Gradimir V. Milovanović, Radosav Ž. Đorđević, Linearna algebra, Elektronski fakultet, Niš, 2004

[2] Dr Ljubiša Kočinac, Linearna algebra i analitička geometrija, Prosveta Niš, 1997

[3] Jerzy Kocik, A theorem on circle configuration, $http://arxiv.org/pdf/0706.0372v1$

[4] $http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric\_bilinear\_form$

[5] $http://mathworld.wolfram.com/BilinearForm.html$

[6] Dan Pedoe, Geometry A Comprehensive Course, Dover Publications Inc, New York, 1970

Abstract

Decartes theorem and some property of circles were found. Configuration of circles in plane and in Minkowski space was described. Formula for forth circle when we have three known circles and properties between those circles is given, so some cases of circles configuration were solved.

Key words: Decartes theorem, Apollonian problem, Minkowski space, circle configuration